



TITLE:

# 等方乱流を表す不安定周期運動 (流れの遷移と乱流のスケルトン)

AUTHOR(S):

木田, 重雄; 河原, 源太

---

CITATION:

木田, 重雄 ...[et al]. 等方乱流を表す不安定周期運動 (流れの遷移と乱流のスケルトン). 数理解析研究所講究録 2005, 1454: 179-186

ISSUE DATE:

2005-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47800>

RIGHT:

# 等方乱流を表す不安定周期運動

京大・工 木田重雄 (Shigeo KIDA)  
 京大・工 河原源太 (Genta KAWAHARA)  
 La Trobe Univ. Lennaert van Veen

## 1 はじめに

乱流における流体運動は時間的にも空間的にもランダムに変動する。流体の運動を記述する変数で張られる状態空間において、流れの運動状態は点で、またその時間発展は点の軌道で表される。定常乱流の状態点は状態空間の有限領域を閉じることなく動き回る。ところで、カオス力学系ではカオス軌道の近傍に無限個の不安定周期軌道が存在することが知られている。自由度が3以下の低次元力学系では、カオス軌道のさまざまな統計的性質をこれらの不安定周期軌道の性質を用いて表すことができる。カオスの一種である乱流でも、やはりその近傍に無数の不安定周期運動が存在する。これらの周期運動の中には、乱流と同じ統計的性質をもつものもあれば、そうでないものもある。このうち、乱流研究において重要なのは前者である。本稿では、最近われわれが発見した定常等方乱流における周期運動について述べる (van Veen, Kida & Kawahara 2005)。

## 2 高対称流

発達した乱流は大きなレイノルズ数で実現されるが、流体運動の自由度はレイノルズ数の増大とともに急激に大きくなり、周期運動を数値的に捉えるのが難しくなる。そこで、流れに空間対称性を課して、自由度をできるだけ少なくすることを考える。ナヴィエ・ストークス方程式と連続の式によって保存される空間対称性をいくつか組み合わせて作られる高対称流と呼ばれる流れの構造を図1に示す (Kida 1985)。辺の長さ  $2\pi$  の大きな立方体は周期箱で、流れは各辺の方向に周期的である。この周期条件に加えて、流れは3つの面、 $x_1 = \pi$ ,  $x_2 = \pi$ ,  $x_3 = \pi$  のそれぞれに関して鏡面对称で、かつ3つの直線、 $x_1 = x_2 = \pi/2$ ,  $x_2 = x_3 = \pi/2$ ,  $x_3 = x_1 = \pi/2$  のそれぞれのまわりに4回回転対称である。このとき、図1の64個の小さな立方体の中の速度の1つの成分から周期箱全体の流れ場を構成することができる。したがって、高対称流は一般の周期流に比べて、計算に必要なメモリーを1/192倍に節約することができる。また計算方法を工夫すれば、数値シミュレーションにかかる計算時間も、1/192倍に節約できる (Kida 1985)。

さて、速度場  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  と渦度場  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  をフーリエ変換し、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (1)$$

と表す。両フーリエ係数の間には、

$$\tilde{\omega}_i(\mathbf{k}, t) = -\epsilon_{ijk} k_j \tilde{u}_k(\mathbf{k}, t) \quad (2)$$

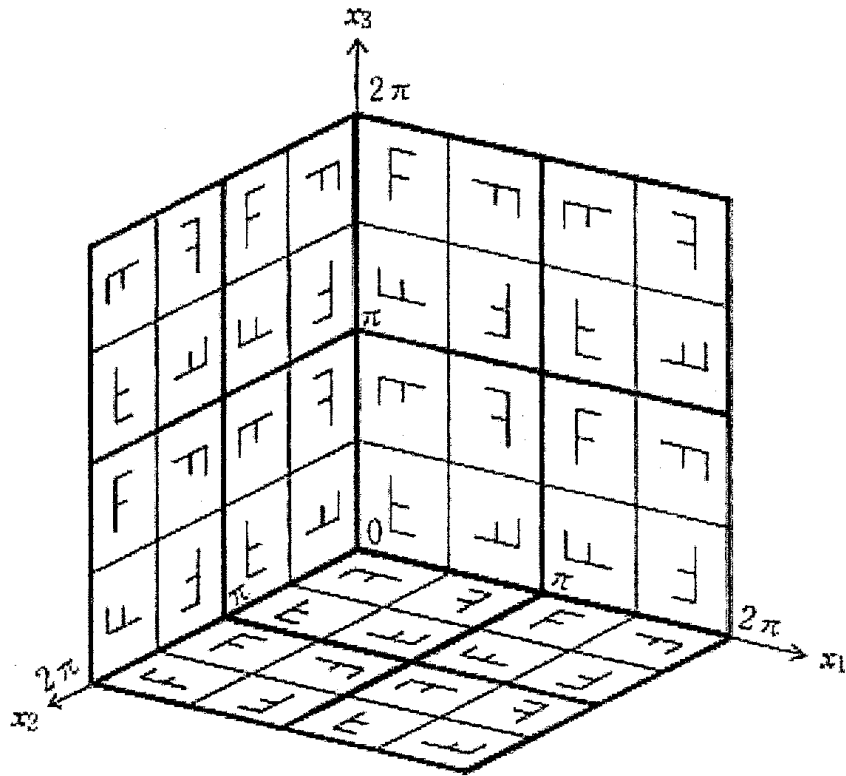


図 1: 高対称流。周期箱 ( $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2\pi$ ) は向きの異なる 64 個の小さな基本立方体からなる。基本立方体の面上の文字 F は流れの状態を表す。裏向き文字は鏡像流れを意味する。流れは 3 つの平面,  $x_1 = \pi$ ,  $x_2 = \pi$ ,  $x_3 = \pi$ , のそれぞれに関して反対称であり, かつ 3 つの直線,  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}\pi$ ,  $x_2 = x_3 = \frac{1}{2}\pi$ ,  $x_3 = x_1 = \frac{1}{2}\pi$ , のそれぞれのまわりに 4 回回転対称である。(Kida 1985)。

なる関係がある。ここに,  $\epsilon_{ijk}$  は単位交代テンソルで, 添字は 1~3 の値をとる。ひとつの項に繰り返し現れる添字については 1~3 にわたって和をとるという規約を採用している。

渦度方程式と連続の式はそれぞれ,

$$\frac{d}{dt} \tilde{\omega}_i(\mathbf{k}, t) = \epsilon_{ijk} k_j k_l \tilde{u}_k \tilde{u}_l(\mathbf{k}, t) - \nu k^2 \tilde{\omega}_i(\mathbf{k}, t), \quad (3)$$

$$k_i \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (4)$$

と書ける。

定常乱流を維持するために低波数成分へエネルギーを注入する。ここでは, 波数  $|\mathbf{k}| = k_f$  ( $= \sqrt{11}$ ) の速度のフーリエ係数の絶対値を常に一定に保つという条件

$$|\tilde{u}_i(\mathbf{k}, t)| = 1/8 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (|\mathbf{k}| = \sqrt{11} \text{ に対し}) \quad (5)$$

を採用する。乱流へのエネルギー流入率は

$$e(t) = \sum_{|\mathbf{k}|=k_f} \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) \frac{d}{dt} \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) \quad (6)$$

で与えられる。

周期箱内の乱流の全運動エネルギーは

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)|^2, \quad (7)$$

エンストロフィーは

$$Q(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k}, t)|^2, \quad (8)$$

また、エネルギー散逸率は

$$\epsilon(t) = 2\nu Q(t) \quad (9)$$

で定義される。さらに、テイラー長に基づくレイノルズ数を

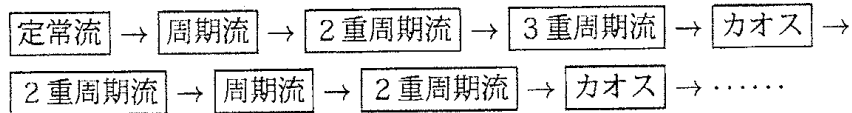
$$R_\lambda(t) = \sqrt{\frac{10}{3}} \frac{1}{\nu} \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{Q}} \quad (10)$$

で導入する。

### 3 乱流状態

前節で述べたように、速度場の低波数成分の大きさを一定に保ち（式 (5) 参照）、動粘性係数  $\nu$  の値を変えて、流れの運動方程式（式 (3) と (4)）を数値シミュレーションする。初期条件に依存しない長時間後の流れ場のふるまいに着目するので、初期条件は任意である。

粘性が十分大きい場合 ( $\nu > 0.0012$ ) は定常な流れが実現する。粘性が小さくなるに従って流れの時間的ふるまいは次第に複雑になり、その時間変動の特性は、



のように変化する (Kida, Yamada & Ohkitani 1989)。2度目のカオス状態が現われるのは動粘性係数が  $\nu < 0.0045$  の場合である。以下では、この範囲の動粘性係数における流れ場のふるまいに着目する。

ところで、乱流のエネルギー散逸率は式 (9) で定義されるが、非粘性極限 ( $\nu \rightarrow 0$ ) ではどのような値に近づくであろうか。この極限値は、エンストロフィー  $Q$  の動粘性係数に対する依存性の違いによって、ゼロ、正の有限値、あるいは正の無限大となる。このう

ちのどれになるかについては数学的に厳密な結論はまだ出されていないが、ここでは、コルモゴロフの普遍平衡理論におけるように、「非粘性極限でエネルギー散逸率が有限である」( $\nu \rightarrow 0$  で  $0 < \epsilon < \infty$ ) という仮定を乱流のもつ基本的性質として採用する。

図2に、数値シミュレーションで得られたエネルギー散逸率の粘性係数に対する依存性を破線 (turbulence と指示) で示す。この粘性係数の範囲では、散逸率は 0.1 あたりに漸近しているようにみえる。

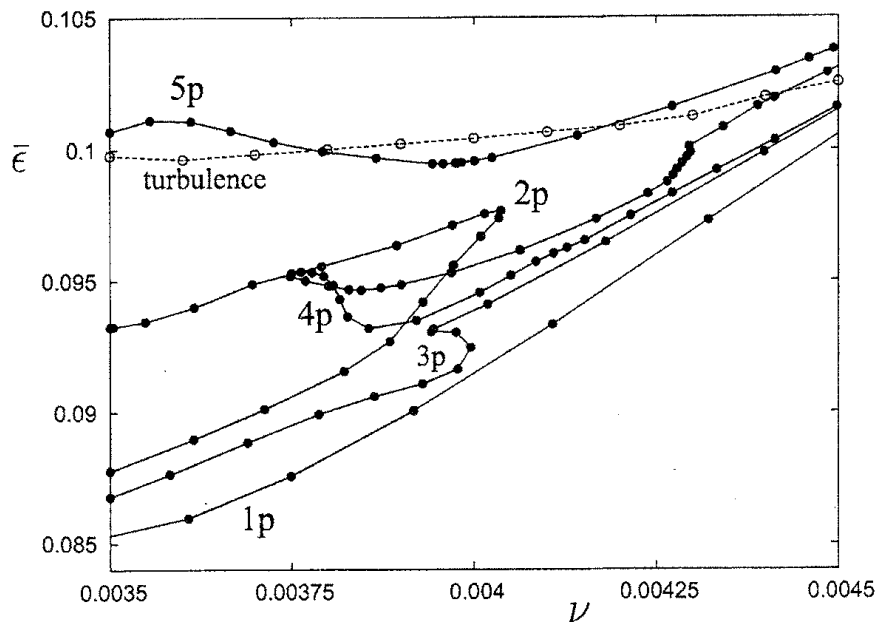


図 2: エネルギー散逸率のレイノルズ数依存性。点線は乱流におけるエネルギー散逸率，記号  $mp$  の付いている実線は周期約  $mT_k$  の周期運動のエネルギー散逸率を表す。黒丸および白丸が計算値である。

#### 4 不安定周期運動

流れの状態はすべての波数に対する渦度のフーリエ成分  $\tilde{\omega}_i(\mathbf{k}, t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を指定することによって定まる。ただし、高対称流の場合は、独立なフーリエ成分の数は一般の周期流の  $1/192$  倍である。さて、独立な渦度のフーリエ成分で張られる状態空間を考える。流れの状態はこの状態空間の 1 点 (状態点という) で表される。流れの状態の変化は状態点の軌道で表される (図3 参照)。いま、渦度のフーリエ成分 (すなわち、この状態空間の座標軸) をひとつ任意に選び、その値が一定である超曲面をとる。これをポアンカレー面という。なお、このポアンカレー面は、流れの状態点の軌道が際限なく横切るように選ぶ。

状態点の軌道のポアンカレー面との交点のひとつを  $\mathbf{y}$  とする。この点から軌道を追って行って次にポアンカレー面と同じ向きに交差するとき、その交点の座標を  $P_\nu(\mathbf{y})$  とす

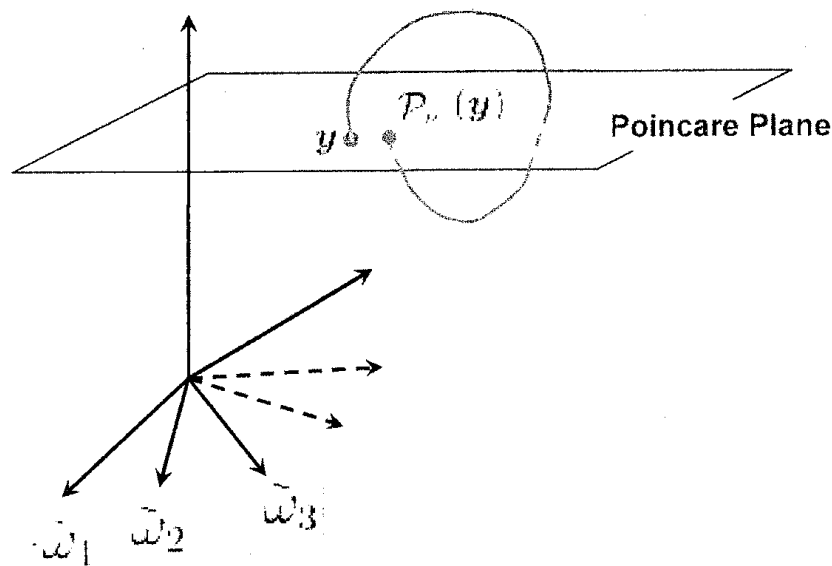


図 3: ポアンカレー写像。ポアンカレー面上の状態点  $y$  が次に面を横切る点を  $P_v(y)$  とする。

る。この  $P_v$  をポアンカレー写像という。ポアンカレー面上のある点  $y$  が、その後、同じ向きに  $m$  回ポアンカレー面と交差したときの点の位置は  $P_v^m(y)$  と書ける。したがって、状態点の軌道がポアンカレー面を  $m$  回横切って閉じる条件は

$$P_v^m(y) - y = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

で与えられる。なお、引き続くポアンカレー写像にかかる時間は各回の写像ごとに異なるが、ある最頻値 ( $T_r$  と記す) およびその 2 倍 (すなわち,  $2T_r$ ) のまわりに集中して分布している。ここでは、この最頻値をポアンカレー写像の回帰時間とよぶことにする。

式 (11) の条件を満たす周期運動をニュートン・ラプソン反復法を用いて求める。周期運動の周期は回帰時間  $T_r$  のほぼ  $m$  倍である。周期約  $mT_r$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5$ ) の周期運動について、粘性散逸率の動粘性係数依存性を図 2 に示す。周期約  $5T_r$  の周期運動のエネルギー散逸率は乱流と同じ依存性を示すが、それ以外のは粘性とともに単調に小さくなっている。したがって、この中では周期約  $5T_r$  の周期運動のみが、乱流と同じ特性をもっていると考えられる。

## 5 乱流を表す周期運動

前節で求めた周期約  $5T_r$  の周期運動の状態点の軌跡を、 $\nu = 0.0035$  の場合に、エネルギー流入率  $e$  とエネルギー散逸率  $\epsilon$  で張られる平面に射影したものを図 4 に黒丸付き曲線で示す。数字は回帰時間  $T_r$  を単位とした時間である。ただし、時間の原点は任意である。軌道は全体として反時計まわりに回る。軌道は 2 つの時間帯に大別される。時間 0 ~

3 はエネルギー散逸率が比較的小さな時間帯で、時間 3 ～ 5 はエネルギー散逸率が比較的大きな時間帯である。前者を周期運動の静穏時間帯、後者を活発時間帯とよぶことにする。ここには示さないが、周期約  $5T_R$  の周期運動以外の周期運動は、静穏時間帯のみで活発時間帯が存在しない。

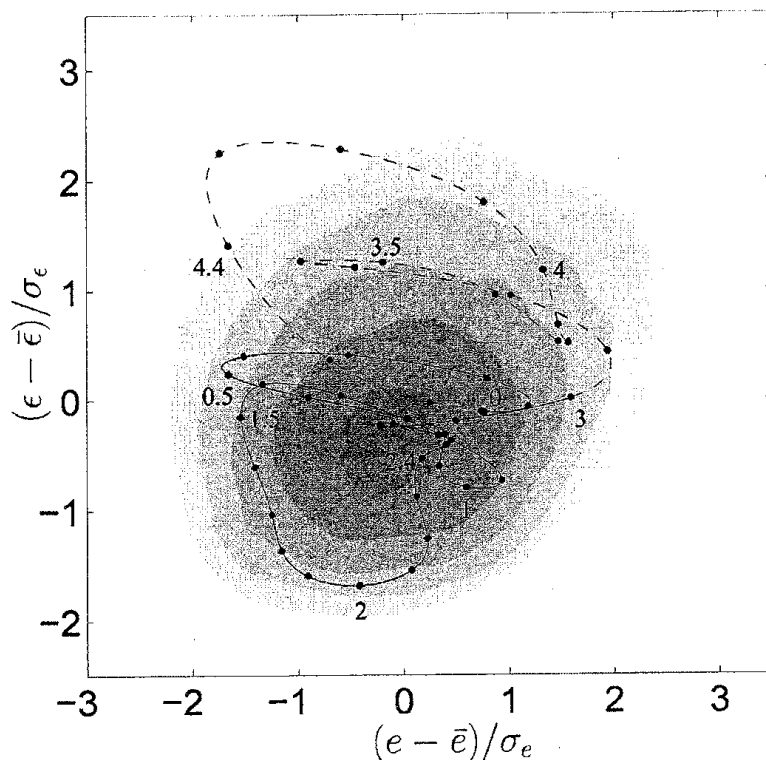


図 4: 周期約  $5T_R$  の周期運動の軌道と乱流の状態確率分布。周期運動は閉曲線で表されている。実線は静穏時間帯 ( $t/T_R < 3$ )、破線は活発時間帯 ( $t/T_R > 3$ ) である。数字は回帰時間  $T_R$  を単位とした時間で、 $0.1T_R$  ごとに黒丸を付してある。等高線は乱流の状態確率分布を表し、濃いところほど値が大きい。横軸はエネルギー流入率  $e$ 、縦軸はエネルギー散逸率  $\epsilon$  で、それぞれ乱流における時間平均を原点とし標準偏差で規格化してある。 $\nu = 0.0035$ 。

この周期約  $5T_R$  の周期運動と乱流のエネルギースペクトルを比較する。図 5 に、縦 1 次元エネルギースペクトル  $E_{||}(k)$  について、高対称流 ( $R_\lambda = 67, \nu = 0.0035$ ) の数値計算における乱流 (○) と周期運動 (+)、剪断乱流 ( $R_\lambda = 130$ ) の室内実験 (●)、および等方乱流 ( $R_\lambda = \infty$ ) 統計理論 (—) の結果を示す。ここに、 $\eta$  はコルモゴロフ長で、座標軸はコルモゴロフの相似則に従って規格化してある。これらの異なる方法によって得られたスペクトルは、高波数領域 ( $k\eta > 0.01$ ) で互いによく一致している。

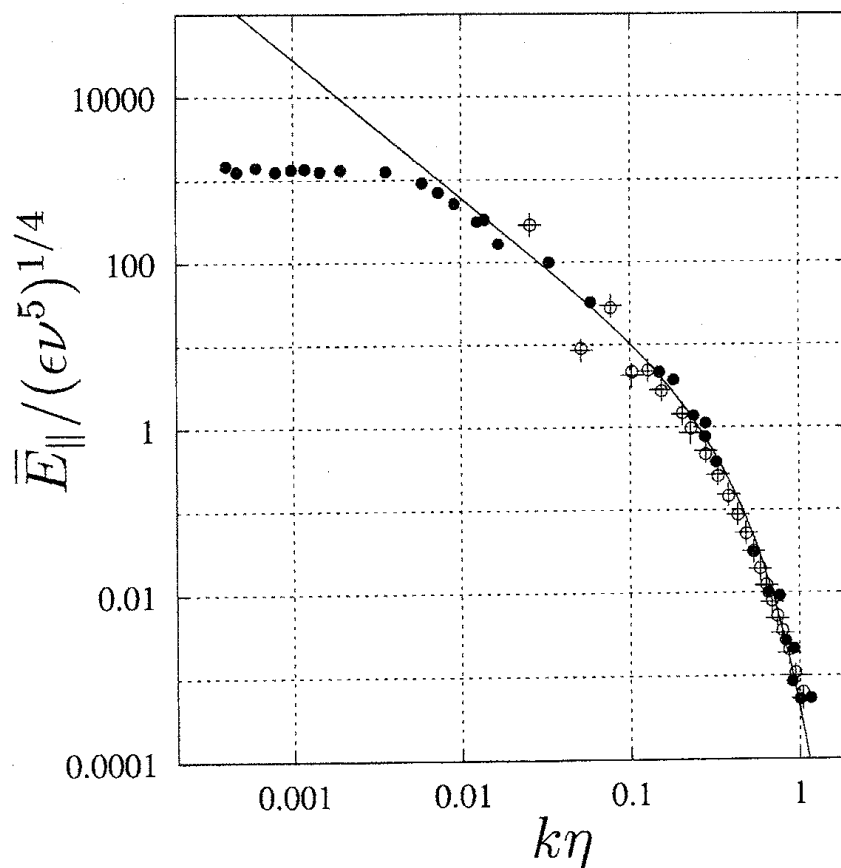


図 5: 1次元縦エネルギースペクトル。高対称流 ( $R_\lambda = 67$ ) における乱流と周期約  $5T_R$  の周期運動のスペクトルをそれぞれ  $\circ$  と  $+$  で示す。一様剪断乱流 ( $R_\lambda = 130$ ) におけるスペクトルの実測値を  $\bullet$  で (Champagne, Harris & Corrsin 1970), 疎直接相互作用展開理論によるエネルギースペクトルの  $R_\lambda \rightarrow \infty$  における漸近形を曲線で示す (Kida & Goto 1997)。縦横座標はいずれもコルモゴロフの相似則に従って規格化してある。



## 6 まとめ

定常乱流には多数の周期運動が埋もれている。これらの周期運動には乱流状態をよく表すものとそうでないものがある。本研究では、高対称流（自由度約 10,648,  $R_\lambda = 67$ ）において、等方乱流の特性をよく表す周期運動を抽出した。この周期運動は実在乱流と同じエネルギースペクトルを示すことから、乱流がひんばんにこの周期運動の状態に近づいていると想像される。すなわち、この周期運動はいわば乱流の骨格（乱流のスケルトン）を表している。決して再現されない乱流そのものに比べてその物理特性の解析がはるかに簡単なこの周期運動を用いて、乱流現象の本質を解明したい。

## 参考文献

- [1] van Veen, L., Kida, S. and Kawahara, G. 2005 Periodic motion representing isotropic turbulence. *Fluid Dyn. Res.* (in print).
- [2] Kida, S. 1985 Three-dimensional periodic flows with high-symmetry. *J. Phys. Soc. Japan* **54**, 2132–2136.
- [3] Champagne, F.H., Harris, V.G. and Corrsin, S. 1970 Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow. *J. Fluid. Mech.* **41**, 81–139.
- [4] Kida, S., Yamada, M. and Ohkitani, K. 1989 A route to chaos and turbulence. *Physica D* **37**, 116–125.
- [5] Kida, S. and Goto, S. 1997 A Lagrangian direct-interaction approximation for homogeneous isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* **345**, 307–345.